یا ذاالامن والامان

امنیت داده و شبکه

رمزنگاری نامتقارن (کلید عمومی)

مرتضی امینی - نیمسال دوم ۱۴۰۰-۱۳۹۹

فهرست مطالب

- مبانی رمزنگاری کلید عمومی
- مقایسه با رمزنگاری سنتی و متقارن
- کاربردهای رمزنگاری کلید عمومی
- الگوریتم رمز RSA
- الگوریتم تبادل کلید دیفی-هلمن
- الگوریتم رمز الجمل

مبانی رمزنگاری کلید عمومی

- رمزنگاری کلید عمومی اساساً با انگیزه رسیدن به دو هدف طراحی شد:
  - حل مساله توزیع کلید در روشهای رمزنگاری متقارن
  - امضای دیجیتال

  - دیفی و هلمن اولین راه حل را در ۱۹۷۶ ارایه دادند.

رمزنگاری کلید عمومی

- کلیدهای رمزگذاری و رمزگشایی متفاوت اما مرتبط هستند.
- رسیدن به کلید رمزگشایی از کلید رمزگذاری از لحاظ محاسباتی ناممکن است.
- (در حفظ محرمانگی) رمزگذاری امری همگانی است و اساساً نیازی به اشتراک گذاشتن اطلاعات محرمانه ندارد.
- (در حفظ محرمانگی) رمزگشایی از طرف دیگر امری اختصاصی بوده و محرمانگی پیام‌ها محفوظ می‌ماند.

نمادها و قراردادها

- **کلید عمومی:** کلید رمزگذاری (در حفظ محرمانگی)
  - این کلید را برای شخص A با PU_a نشان می‌دهیم.
- **کلید خصوصی:** کلید رمزگشایی (در حفظ محرمانگی)
  - این کلید را برای شخص A با PR_a نشان می‌دهیم.

نیازمندیهای رمزنگاری کلید عمومی

- از نظر محاسباتی، تولید کلید خصوصی (PR_b) با دانستن کلید عمومی (PU_b) غیرممکن باشد.
- بازیابی پیام M، با دانستن PU_b و C غیرممکن باشد.
- ویژگی تقارنی: از هر یک از کلیدها می‌توان برای رمزکردن استفاده کرد. در این صورت از کلید دیگر برای رمزگشایی استفاده می‌شود.

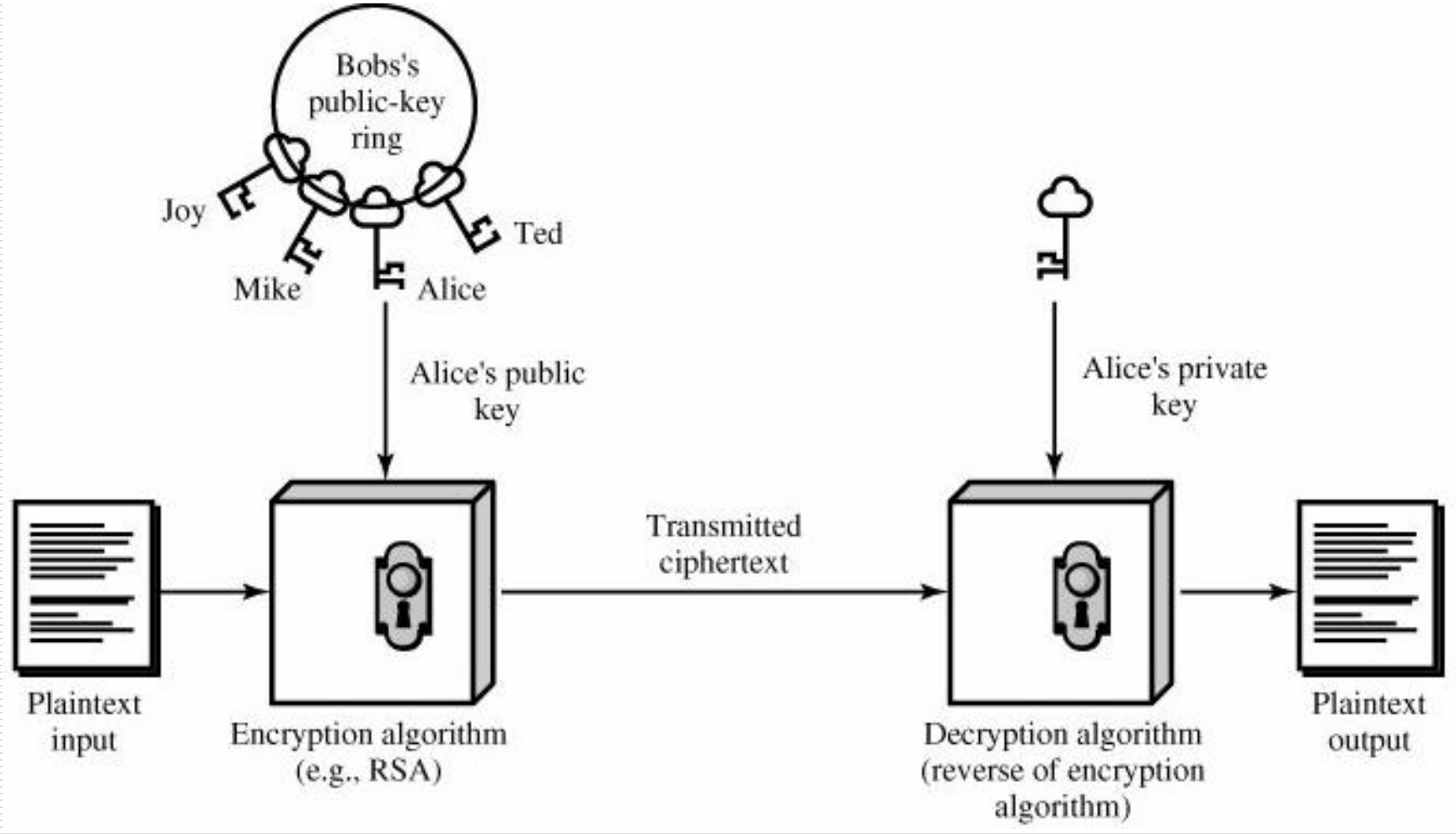
$$M = D_{PR_b}[E_{PU_b}(M)] = D_{PU_b}[E_{PR_b}(M)]$$

رمزگذاری کلید عمومی

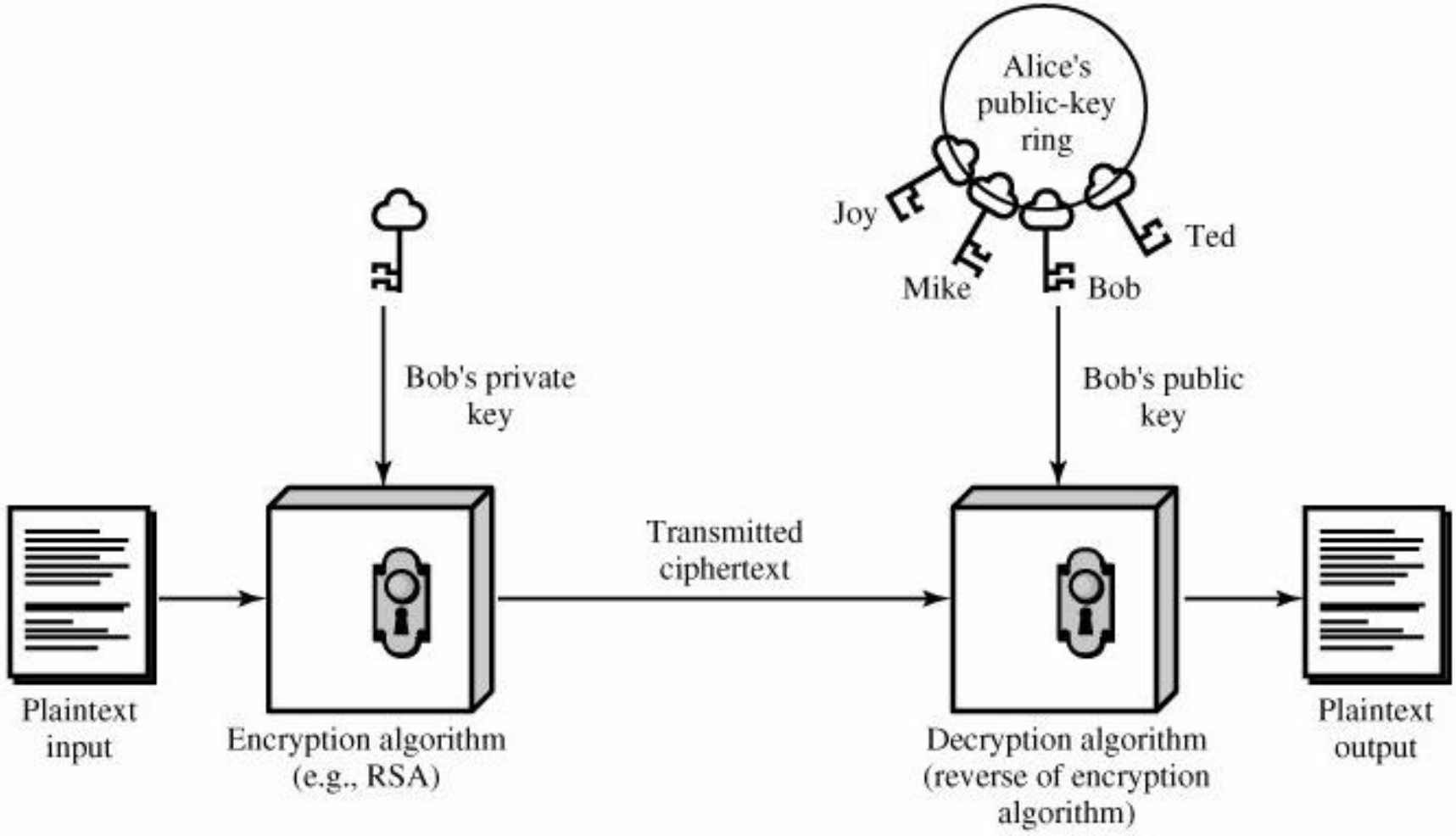
- برای رمزنگاری کلید عمومی گام‌های زیر را برمی‌داریم:

1. هر کاربر یک زوج کلید رمزگذاری و رمزگشایی تولید می‌کند.
2. کاربران کلید رمزگذاری خود را به صورت عمومی اعلان می‌کنند درحالی که کلید رمزگشایی مخفی می‌باشد.
3. همگان قادر به ارسال پیام رمز شده برای هر کاربر دلخواه با استفاده از کلید رمزگذاری (عمومی) او هستند.
4. هر کاربر می‌تواند با کمک کلید رمزگشایی (خصوصی) پیام‌هایی که با کلید رمزگذاری (عمومی) او رمز شده رمزگشایی کند.

رمزگذاری با کلید عمومی



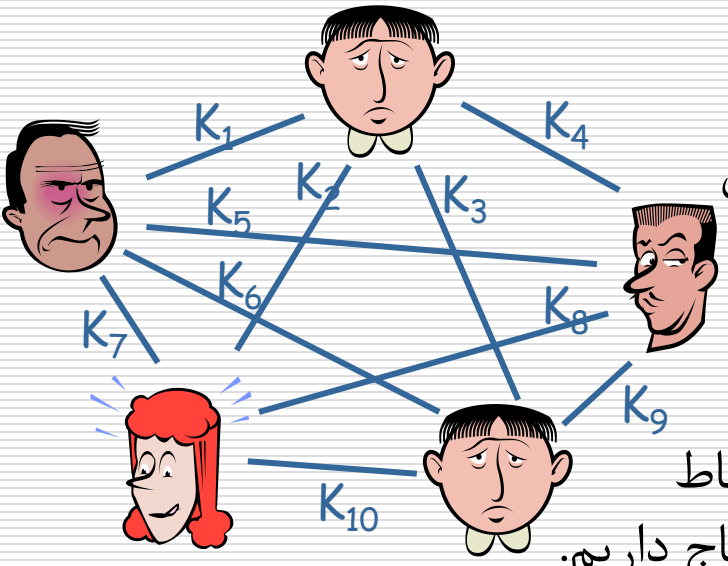
رمزگشایی با کلید عمومی



فهرست مطالب

- مبانی رمزنگاری کلید عمومی
- **مقایسه با رمزنگاری سنتی و متقارن**
- کاربردهای رمزنگاری کلید عمومی
- الگوریتم رمز RSA
- الگوریتم تبادل کلید دیفی-هلمن
- الگوریتم رمز الجمل

مقایسه رمزنگاری متقارن و رمزنگاری کلید عمومی



رمزنگاری متقارن

- استفاده از یک کلید یکسان و مخفی برای رمزنگاری

معایب

- مشکل مدیریت کلیدها
  - نیاز به توافق بر روی کلید پیش از برقراری ارتباط
  - برای ارتباط n نفر باهم به n(n-1)/2 کلید احتیاج داریم.
- عدم پشتیبانی از امضاء رقمی (دیجیتال)

مزایا

- با این وجود از الگوریتم‌های رمزنگاری با کلید عمومی سریع‌تر است.

جایگزینی یا تکمیل؟

از نظر کاربردی، رمزگذاری با کلید عمومی بیش از آنکه **جایگزینی** برای رمزگذاری متقارن باشد, نقش **مکمل** آن را برای حل مشکلات توزیع کلید بازی می‌کند.

سوء برداشت!

- دو تصور اشتباه دیگر درباره الگوریتم‌های کلید عمومی
  - رمزنگاری با کلید عمومی امن‌تر است!
    - در هر دو روش رمزنگاری امنیت به طول کلید وابسته است.
  - مسأله توزیع کلید در رمزنگاری با کلید عمومی برطرف شده است!
    - چگونه مطمئن شویم کلید عمومی لزوما متعلق به شخص ادعاکننده است؟!
    - پس توزیع کلید عمومی آسانتر است، ولی بدیهی و بدون مشکل نیست.

فهرست مطالب

- مبانی رمزنگاری کلید عمومی
- مقایسه با رمزنگاری سنتی و متقارن
- **کاربردهای رمزنگاری کلید عمومی**
- الگوریتم رمز RSA
- الگوریتم تبادل کلید دیفی-هلمن
- الگوریتم رمز الجمل

کاربردهای رمزنگاری کلید عمومی

- **رمزگذاری/ رمزگشایی:** برای حفظ محرمانگی
- **امضاء رقمی:** برای کنترل اصالت پیام و معین نمودن فرستنده پیام (پیوند دادن پیام با امضاء کننده) یا همان **عدم انکار**
- **توزیع کلید:** برای توافق طرفین روی کلید مخفی جلسه، قبل از برقراری ارتباط

جایگاه عملی رمزنگاری کلید عمومی

- کلیدهای این نوع از الگوریتم‌ها بسیار طولانی تر از الگوریتم‌های رمز متقارن هستند.
  - الگوریتم RSA با پیمانه ۱۰۲۴ بیتی امنیتی در حد الگوریتم‌های متقارن با کلیدهای ۸۷ بیتی دارد.

- سرعت الگوریتم‌های کلید عمومی از الگوریتم‌های رمزگذاری متقارن پایین‌تر است.
  - RSA تقریباً ۱۰۰۰ بار کندتر از رمزهای متقارن (با امنیت یکسان) است.

حملات به رمزنگاری کلید عمومی

- جستجوی فراگیر (Brute force)
- محاسبه کلید خصوصی از کلید عمومی
- حمله پیام احتمالی (Probable-message attack)
  - مخصوص رمزنگاری کلید عمومی
  - در صورت کوچک بودن پیام (مثلا پیام، یک کلید ۵۶ بیتی DES باشد) می‌توان همه کلیدهای ممکن DES را با کلید عمومی رمز کرد و کلید رمز شده را پیدا کرد.

فهرست مطالب

- مبانی رمزنگاری کلید عمومی
- مقایسه با رمزنگاری سنتی و متقارن
- کاربردهای رمزنگاری کلید عمومی
- **الگوریتم رمز RSA**
- الگوریتم تبادل کلید دیفی-هلمن
- الگوریتم رمز الجمل

کلیات الگوریتم رمزنگاری RSA

- توسط Rivest–Shamir –Adleman در سال ۱۹۷۷ در MIT
- مشهورترین و پرکاربردترین الگوریتم رمزگذاری کلیدعمومی
- مبتنی بر توان رسانی پیمانه‌ای
- امنیت آن ناشی از دشواری تجزیه اعداد بزرگ
- مستندات مربوط به آن تحت عنوان PKCS استاندارد شده است.

Public Key Cryptography Standards

Ronald Linn Rivest
(1947 –)

Adi Shamir
(1952 –)

Leonard Adleman
(1945 –)

مبانی ریاضی RSA

- $\mathbb{Z}_n$: مجموعه اعداد نامنفی کمتر از n
- $\mathbb{Z}_n^*$: مجموعه اعداد طبیعی کمتر از n و اول نسبت به آن.

- مثال:

$$\mathbb{Z}_{۱۲} = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱\}$$

$$\mathbb{Z}_{۱۲}^* = \{۱, ۵, ۷, ۱۱\}$$

نمادگذاری RSA

- n : پیمانه محاسبات
- e: نمای رمزگذاری
- d: نمای رمزگشایی
- M: پیام، عدد صحیح متعلق به $\mathbb{Z}_n$
- تابع RSA: تابع یکطرفه $C = M^e \bmod n$
- تابع معکوس: $M = C^d \bmod n$

مبانی ریاضی RSA

- p و q دو عدد اول می‌باشند.
- φ(n): تعداد اعداد (کوچکتر از n) که نسبت به n اول است.
- کلید عمومی:{e,n}
- کلید خصوصی: {d,n}

$n=p.q$

$\varphi(n)=(p-1).(q-1)$

$gcd(\varphi(n), e)=1, \quad 1<e<\varphi(n)$

$d.e=1 \ [mod \ \varphi(n)], \quad d=e^{-1} \ [mod \ \varphi(n)]$

$C= M^e \ mod \ n, \quad M<n$

$M= C^d \ mod \ n = (M^e)^d \ mod \ n = M^{ed} \ mod \ n = M \ mod \ n$

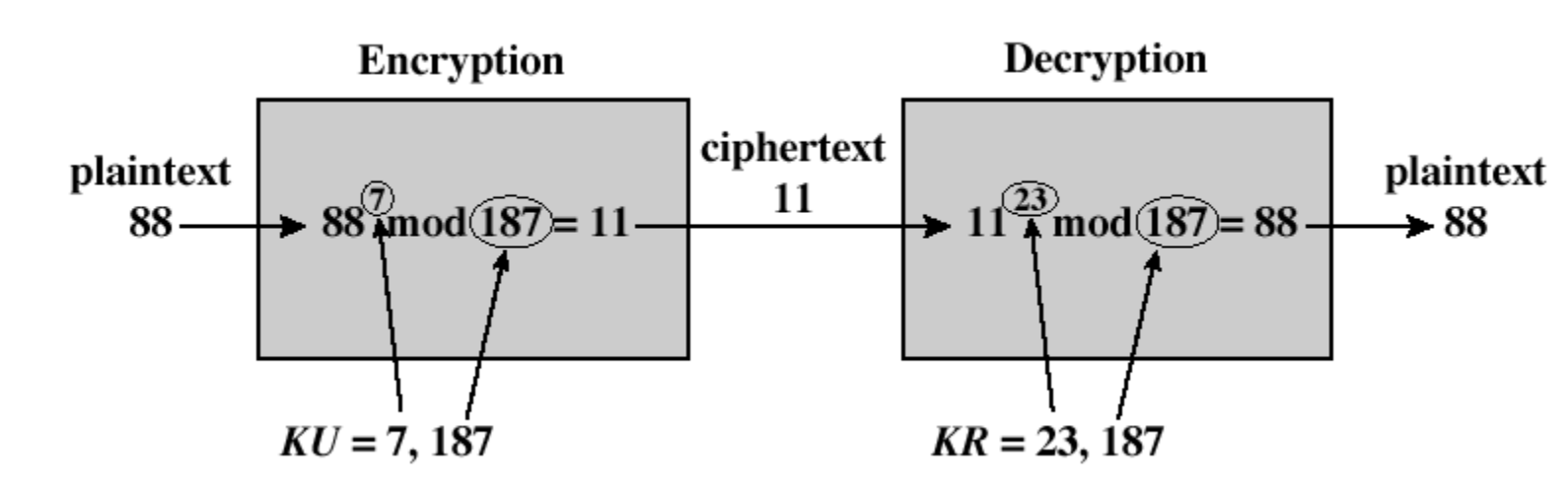
روند تولید کلید در RSA

1. ابتدا دو عدد اول بزرگ p و q را به طور تصادفی انتخاب کن به گونه‌ای که $p \neq q$
2. عدد n و $\phi(n)$ را محاسبه کن $n=p.q$ و $\phi(n)=(p-1).(q-1)$
3. عدد صحیح فرد e کوچکتر از $\phi(n)$ را به گونه ای انتخاب کن که $\gcd(e, \phi(n))=1$ باشد.
4. d را محاسبه کن $d \equiv e^{-1} \pmod{\phi(n)}$
5. زوج $PU=(e,n)$ را به عنوان کلید عمومی اعلام کن.
6. زوج $PR=(d,n)$ را به عنوان کلید خصوصی ذخیره کن.

قراردادها و پروتکل RSA

- هم فرستنده و هم گیرنده مقدار n را می‌دانند.
- فرستنده مقدار e را می‌داند.
  - کلید عمومی : (n , e)
- تنها گیرنده مقدار d را می‌داند.
  - کلید خصوصی : (n, d)
- نیازمندی‌ها:
  - محاسبه M^e و C^d آسان باشد.
  - محاسبه d با دانستن کلید عمومی غیرممکن باشد.

مثال–RSA



p = 17, q = 11, n = p.q= 187

φ(n) = 16.10 =160, pick e=7, d.e≡1 [mod φ(n)]
➔ d = 23

روشهای کارا برای محاسبه نما

- برای محاسبه $a^b \pmod n$ الگوریتم‌های متفاوتی ابداع شده است...
  - فرض کنید $b_k b_{k-1} \ldots b_0$ نمایش مبنای ۲ عدد b باشد.
  - بنابراین خواهیم داشت:

$$a^b = a^{\sum_{b_i \neq 0} 2^i} = \prod_{b_i \neq 0} a^{2^i}$$

$$a^b \bmod n = \left[\prod_{b_i \neq 0} a^{2^i}\right] \bmod n = \left[\prod_{b_i \neq 0} \left(a^{2^i} \bmod n\right)\right] \bmod n$$

الگوریتم توان و ضرب

- بر این مبنا می‌توان الگوریتم زیر را طراحی نمود:

$c \leftarrow 0$; $d \leftarrow 1$

for $i \leftarrow k$ downto 0

do $c \leftarrow 2.c$ ⟹ c is prefix of b

$d \leftarrow d^2 \bmod n$

if $b_i = 1$

then $c \leftarrow c+1$

$d \leftarrow (d.a) \bmod n$ ⟹ $d = a^c \bmod n$

return d

مثال عددی الگوریتم توان و ضرب

```
c ← 0;  d ← 1
for  i ←k  downto  0
do  c ←2.c
    d ←d^2 mod n
    if  b_i=1
        then c ←c+1
             d ←(d.a)
mod n
return d
```

اگر a، b و n با β بیت قابل نمایش باشند،

- نیاز به O(β) عمل ریاضی

i	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
b_i	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
c	1	2	4	8	17	35	70	140	280	560
d	7	49	157	526	160	241	298	166	67	1

Figure 9.8 Result of the Fast Modular Exponentiation Algorithm for $a^b \bmod n$, where $a = 7$, $b = 560 = 1000110000$, $n = 561$

حملات ممکن بر RSA

- حمله آزمون جامع(Brute Force)
  - طول کلید با پیدایش هر نسل جدید از پردازنده‌ها افزایش می‌یابد، ضمن اینکه قدرت پردازشی هکرها زیاد می‌شود!
  - طول کلید معادل تعداد بیتهای پیمانه محاسبات (n) است.

حملات ممکن بر RSA

حملات ریاضی

- تجزیه پیمانه n و در نتیجه محاسبه $\varphi(n)$
- در حال حاضر سختی مساله فوق معادل سختی مساله تجزیه اعداد بزرگ حاصل از ضرب دو عامل اول است.
- الگوریتم‌های مختلفی برای مساله تجزیه ارائه شده است (بهترین آنها LS است).
- در حال حاضر RSA با کلید ۱۰۲۴ تا ۴۰۹۶ بیت امن است.

Twenty Years of Attacks on the RSA Cryptosystem 1999, by Dan Boneh

حملات ممکن بر RSA

حمله زمانی

- زمان اجرای عملیات رمزگذاری یا رمزگشایی می‌تواند اطلاعاتی را در مورد کلید افشا کند.

راه‌های مقابله با حملات زمانی

- استفاده از توان رساندن با زمان ثابت محاسباتی
- اضافه کردن تاخیرهای تصادفی
- قرار دادن اعمال اضافی و گمراه کننده در بین محاسبات

حملات ممکن بر RSA

حمله کانال جانبی

- تاثیرات جانبی اجرای الگوریتم رمزگذاری یا رمزگشایی (مانند میزان توان مصرفی) می‌تواند اطلاعاتی را در مورد کلید افشا نماید.
- مثال: در الگوریتم ارایه شده در اسلایدهای قبل، هرگاه بیت b_i از کلید یک باشد، یک عمل ضرب انجام می‌شود که منجر به مصرف بالاتر می‌شود و زمانی که صفر باشد، مصرف کمتری دیده می‌شود.

راه‌های مقابله با حملات کانال جانبی

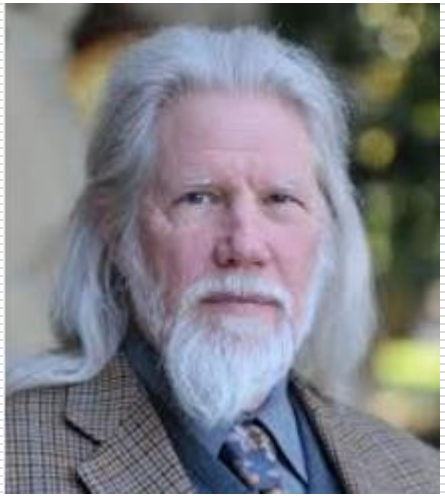
- حذف تاثیرات جانبی
- قرار دادن اعمال اضافی و گمراه کننده جهت تغییر تاثیرات جانبی

فهرست مطالب

- مبانی رمزنگاری کلید عمومی
- مقایسه با رمزنگاری سنتی و متقارن
- کاربردهای رمزنگاری کلید عمومی
- الگوریتم رمز RSA
- **الگوریتم تبادل کلید دیفی-هلمن**
- الگوریتم رمز الجمل

الگوریتم دیفی–هلمن

- توسط Diffie و Hellman در سال ۱۹۷۶ ارائه شد.
- برای تبادل کلید مورد استفاده قرار می‌گیرد.



Bailey Whitfield Diffie
(1944 –)

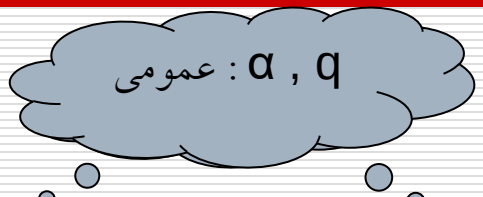
Martin Edward Hellman
(1945 –)

الگوریتم دیفی–هلمن

- طرفین بر روی مقادیر q و α توافق می‌کنند.
- q یک عدد اول و α یک مولد برای این عدد است.
- امنیت روش مبتنی بر دشواری مسأله لگاریتم گسسته است.
- مسأله لگاریتم گسسته: پیدا کردن x با داشتن مقادیر

$$p,\alpha,\alpha^x \bmod p$$

الگوریتم دیفی–هلمن



A

مقدار تصادفی $X_A < q$ را انتخاب می‌کند

B

مقدار تصادفی $X_B < q$ را انتخاب می‌کند

$$Y_A = \alpha^{X_A} \bmod q$$

$$Y_B = \alpha^{X_B} \bmod q$$

$$K_{AB} = (Y_B)^{X_A} \bmod q$$

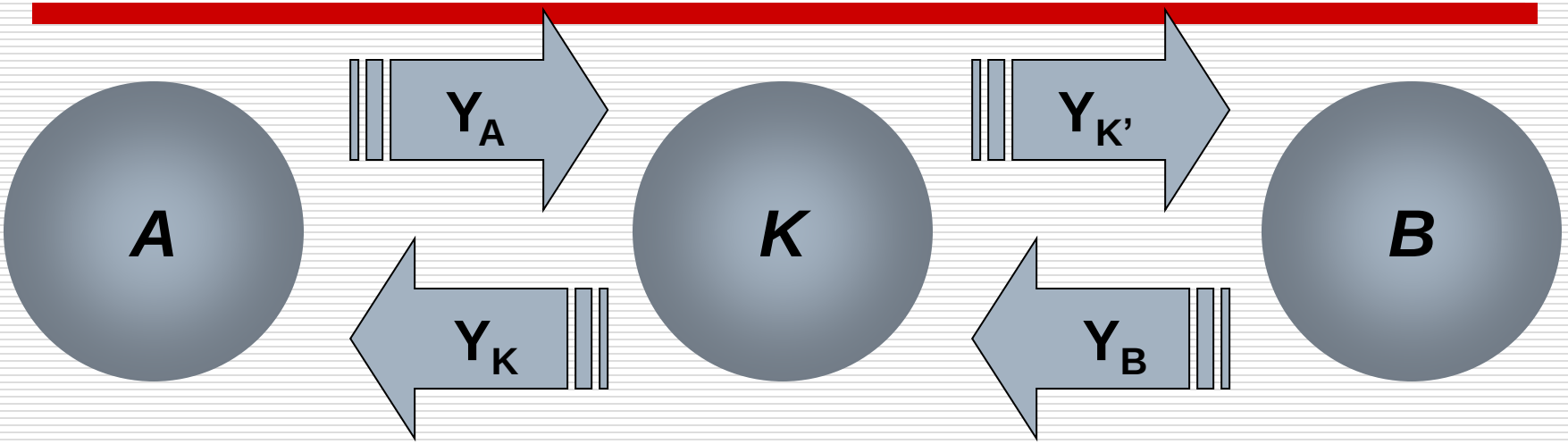
$$K_{AB} = (Y_A)^{X_B} \bmod q$$

کلید مشترک عبارت است از $\alpha^{(X_A \times X_B)} \bmod q$

حمله مرد میانی

- مهاجم به عنوان کانال ارتباطی میان طرفین عمل می‌کند.
- از نوع حملات فعال محسوب می‌شود.
- الگوریتم دیفی-هلمن را تهدید می‌کند.

حمله مرد میانی



$$K_1 = \alpha^{(X_A \times X_K)} \bmod q$$

$$K_2 = \alpha^{(X_B \times X_{K'})} \bmod q$$

A گمان می‌کند کلید K_1 را با B به اشتراک گذاشته است.

B گمان می‌کند کلید K_2 را با A به اشتراک گذاشته است.

رفع مشکل تبادل کلید دیفی–هلمن

- طرفین باید قبل از شروع پروتکل، یک کلید طولانی مدت (LTK) را به اشتراک گذاشته باشند.

LTK: Long-Term Key

  - LTK می‌تواند متقارن یا نامتقارن باشد.
  - در حالت نامتقارن، طرفین کلید عمومی یکدیگر را دارند.

- **دیفی–هلمن احرازاصالت شده**
  (ADH) Authenticated Diffie–Hellman
  - از LTK برای کنترل صحت α^{X_A} و α^{X_B} استفاده می‌شود.
  - در صورت کنترل صحت، مهاجم نمی‌تواند حمله مرد میانی را اجرا کند.

خاصیت محرمانگی پیشرو (Forward Secrecy)

- گاه به آن PFS هم گفته می‌شود (**P**erfect **F**orward **S**ecrecy).
- **تعریف:** در صورت لو رفتن LTK در زمان T، کلیدهای نشستی که قبل از زمان T تبادل شده‌اند امن بمانند.

- ADH دارای خاصیت PFS است.
  - از LTK فقط برای کنترل صحت و نه محرمانگی استفاده می‌شود.
  - محرمانگی کلید نشست وابسته به LTK نیست.

فهرست مطالب

- مبانی رمزنگاری کلید عمومی
- مقایسه با رمزنگاری سنتی و متقارن
- کاربردهای رمزنگاری کلید عمومی
- الگوریتم رمز RSA
- الگوریتم تبادل کلید دیفی-هلمن
- **الگوریتم رمز الجمل**

رمز الجمل (ElGamal)

- ابداع توسط الجمل، رمزنگاری مصری-آمریکایی، در سال ۱۹۸۵
  - در ایران بیشتر با نام «الجمال» شناخته می‌شود.
  - الجمل دانشجوی دکترای هلمن در دانشگاه استنفورد بود.
- امنیت رمز الجمل مبتنی بر دشواری لگاریتم گسسته

طاهر الجمل
(۱۹۵۵ –)

تولید کلید الجمل

- انتخاب پارامترهای عمومی q و α
- انتخاب عدد تصادفی X_A به گونه‌ای که $1< X_A <q-1$
- محاسبه $Y_A = \alpha^{X_A} \; mod \; q$
- **کلید خصوصی:** X_A
- **کلید عمومی:** $\{q,\alpha,Y_A\}$

رمزگذاری و رمزگشایی الجمل

- **رمزگذاری** پیام M که در آن $0 \leq M \leq q-1$
  - انتخاب عدد تصادفی r از $\mathbb{Z}_q$.
  - تولید کلید یکبار مصرف $k = Y_A{}^r \ mod \ q$
  - رمزگذاری پیام به صورت یک زوج $C=(C_1, C_2)$

$$C_1 = \alpha^r \ mod \ q \qquad C_2 = kM \ mod \ q$$

رمزگذاری و رمزگشایی الجمل

- **رمزگشایی** $C=(C_1, C_2)$ با استفاده از کلید خصوصی X_A:
  - بازیابی کلید یکبار مصرف $k = C_1^{X_A} \ mod \ q$
  - رمزگشایی پیام $M = (C_2 k^{-1}) \ mod \ q$

کاربردهای برخی الگوریتم‌های کلید عمومی

الگوریتم	رمزگذاری/ رمز گشایی	امضاء رقمی	تبادل کلید
RSA	√	√	√
Diffie-Hellman	×	×	√
DSS (بعداً معرفی خواهد شد)	×	√	×
ElGamal Encryption	√	×	√

پایان

مرکز امنیت داده و شبکه شریف

http://dnsl.ce.sharif.edu

پست الکترونیکی

amini@sharif.edu

درستی RSA

Chinese Remainder Theorem

- If $n_1, n_2, \ldots, n_k$ are pairwise relatively prime and $n = n_1 n_2 \ldots n_k$, then for all integers x and a:
- $x \equiv a \pmod{n_i}$ for $i = 1, 2, \ldots, k$

if and only if

$x \equiv a \pmod{n}$

Fermat's Theorem

- If p is prime, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

درستی RSA

- Since *e* and *d* are multiplicative inverses modulo $\Phi(n) = (p-1)(q-1)$, So $ed = 1 + k(p-1)(q-1)$

- We prove that $M^{ed} = M \pmod p$, for all M
  - If $M \neq 0 \pmod p$
    - $M^{ed} = M (M^{p-1})^{k(q-1)} \pmod p$
    - $= M (1)^{k(q-1)} \pmod p$
    - $= M \pmod p$
  - If $M = 0 \pmod p$, then $M^{ed} = M \pmod p$
- In the same way: $M^{ed} = M \pmod q$, for all M
- Thus: $M^{ed} = M \pmod n$ based on Chinese remainder theorem